APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ en el punto (0, 1)
   Sol : r : y – 1 = - 4(x - 0)

2. Obténgase la ecuación de la recta tangente a f(x)= $\frac{x^3}{x^2-9}$ en el punto de abscisa x = 1.
   Sol : $r: y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32}(x-1)$

3. Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3e^{-2x}$ en el punto x = 0.
   Sol : r : y – 3 = - 6(x - 0)

4. Dada la función $f(x) = x^2 senx$, encuentra las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la función en el punto de abscisa x = π.
   $Sol: r_t: y - 0 = -\pi^2(x-\pi) \quad r_n: y - 0 = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)$

5. Calcula la ecuación de la recta tangente a f(x) = $\frac{1}{x}$ en el punto x = $\frac{1}{2}$.
   $Sol: y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

6. Calcular la ecuación de las rectas tangentes a la función f(x) = $x^3 - 2x$ paralelas a la bisectriz del primer cuadrante. Calcula también la ecuación de la recta normal en esos puntos.
   $Sol: r_t: y + 1 = 1(x-1) \quad r_n: y + 1 = -1(x-1) \ ; \ r_t: y - 1 = 1(x+1) \quad r_n: y - 1 = -1(x+1)$

7. Hallar la recta tangente horizontal a la función $f(x) = x^2 - 8x + 1$.
   $r: y + 15 = 0(x-4)$

8. Hállese la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.
   $Sol: r: y - 5 = 8(x-2)$

9. Dada la función f(x) = $2x^2 - \frac{x^3}{3}$, calcula el valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de f(x). $Sol: pend.\max = 4\ en\ x = 2$

10. Calcula los extremos relativos y la monotonía de las siguientes funciones:
    a) $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+1}$ — $Sol: Cr \rightarrow (-\infty,-1)U(-1,\infty)$
    b) $f(x) = x(5-x)^2$ — $Sol: Cr \rightarrow \left(-\infty,\frac{5}{3}\right)U(5,\infty) \quad Dec \rightarrow \left(\frac{5}{3},5\right)$
    c) $f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$ — $Sol: Cr \rightarrow (-\infty,1)U(4,\infty) \quad Dec \rightarrow (1,4)$
    d) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ — $Sol: Cr \rightarrow (-\sqrt{3},-1)U(-1,1)U(1,\sqrt{3}) \quad Dec \rightarrow (-\infty,-\sqrt{3})U(\sqrt{3},\infty)$
    e) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 + x - 2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$ — $Sol: Cr \rightarrow (-\infty,-1)U\left(-\frac{1}{2},\infty\right) \quad Dec \rightarrow \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$
    f) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ — $Sol: Dec \rightarrow (-\infty,\infty)$
    g) $f(x) = 3x^2e^{-x}$ — $Sol: Cr \rightarrow (0,2) \quad Dec \rightarrow (-\infty,0)U(2,\infty)$
    h) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ — $Sol: Dec \rightarrow (-\infty,0)U(0,\infty)$

11. Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio viene dada por $c(t) = te^{-\frac{t}{2}}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente. $Sol: \frac{2}{e} mg/ml \ \ a \ los \ t \ = 2h. No$

12. La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} \ mg/m^3$, donde $t \in [0,30]$ representa el tiempo, **expresado en días**, transcurrido desde las 0 horas del día 10 de abril.
    a) ¿Qué nivel de NO_2 había a las 12 horas del día 10 de abril?
    b) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿Cuál fue ese nivel máximo? $Sol: \ a. c(t) = 77{,}28 \quad b. t = 20 \quad c(t) = \frac{460}{3}$

13. Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48€ el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:
    a) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso x = 0 (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia)
    b) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene (12 + x) ml de mezcla.
    c) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.
    d) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar, en este caso, la capacidad del frasco y el precio resultante.
    $Sol: a. 576€ \quad b. (12+x)(48-3x) \quad c. x = 16 \quad d. \ x = 2 \quad 14ml \quad 588€$

14. En un experimento de un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes $m_1 = 0.92, \ m_2 = 0.94, \ m_3 = 0.89, \ m_4 = 0.9, \ m_5 = 0.91$.
    Se tomará como resultado el valor x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función
    $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor de x. $Sol: x = \frac{114}{125}$

15. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale 4 cm. $Sol: 2cm^2$

16. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80€/m y la de los otros lados cuesta 10€/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 28800€. $Sol: 115200m^2$

17. Las páginas de un libro deben medir cada una 600cm² de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm, mientras que el margen superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página de forma que permitan obtener el mayor área impreso posible. $Sol: 21{,}91 \ cm \ ancho \ y \ 27{,}30 \ cm \ alto$