WOLFRAM academia

GEOMETRÍA 3D II

1. a) Encontrar la distancia del punto P(1, -1, 3) a la recta que pasa por los puntos Q(1, 2, 1) y R(1, 0, -1)
   b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.
   c) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

   Solución: a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b)$5u^2$ $c)$ $(1,-3,1),(1,1,5) y\ (1,3,-3)$.

2. Sean las rectas $r: x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{z+1}{-2}$ $\quad y \quad$ $s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}$
   a) Hallar el valor de k para que r y s sean coplanarias.
   b) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas
   c) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

   Solución: a) k= - 1 b)$x+y=3$ $c)$ $(x,y,z)=(5/4,7/4,1/2)+t(1,1,0)$.

3. Se considera el tetraedro cuyos vértices son A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(-2, 1, 0) y D(0, 1, 3)
   a) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro ABCD.
   b) Calcular la distancia de D al plano determinado por A, B y C.
   c) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

   Solución: a) $\frac{\sqrt{19}}{2}u^2\ y\ \frac{7}{6}\ u^3$b)$\frac{7\sqrt{19}}{19}u$ $c)\frac{7\sqrt{41}}{41}u$

.

4. Sean las rectas $r: \begin{cases} x-2y-6z=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\quad s: \ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{a}=z$
   a) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.
   b) Calcular la distancia entre r y s cuando a = - 2.

   Solución: a) $a\neq -2$ $se\ cruzan.$ $a=-2$ $paralelas$ b)$\frac{\sqrt{53}}{3}u$

5. Se consideran las rectas $r:\ x=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2}$ $\quad y \quad$ $s:\ \frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{-1}$
   a) Calcular la distancia entre r y s.
   b) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s.
   c) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y pasa por el punto P(1, 0, 0)

   Solución: a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}u$ b) $\begin{cases} 4x+y-z=-2 \\ 2x-3y+3z=1 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} 8x+5y+z=8 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

6. Se consideran el plano $\pi: x+y-2z=6$ y la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Se pide:
   a) Hallar el punto simétrico de M (1, 1, 1) respecto del plano π
   b) Hallar el punto simétrico de M (1, 1, 1) respecto de la recta r.

   Solución: a) $(3,3,-3)$ b)(9/7, 4/7, -22/7)

7. Dado el plano $\pi: x+y+az+1=0$ y las rectas $r: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ $\quad r'=\begin{cases} x=2 \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ $\quad r''=\begin{cases} x=3 \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con π con las tres rectas estén alineados.
b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos.
c) Calcula la distancia de dicha recta al origen.

Solución: a) a=1 b)(x,y,z)=(1, -1, -1) + t(1, -1, 0) c) $1u^2$

8. Se consideran la recta $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y los planos $\pi 1: 2 - 3x + 2y - z = 0$ y $\pi 2: 3 + 2x + 2y - 2z = 0$
a) Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.
b) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) Calcular la distancia de r a $\pi 2$.

Solución: a) $corta\ a\ \pi 1\ y\ es\ paralela\ a\ \pi 2$ b)Se cortan c) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ u$

9. Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ cuya distancia a P(1, 3, -1) es 3 u.

Solución: a) (0, 1, 1) y (3, 2, -3)

10. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$
a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a ambas y es perpendicular a las dos.
b) Calcular la distancia mínima entre ellas

Solución: a) $t: \begin{cases} 3x - 10y + 6z + 1 = 0 \\ x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u$

11. Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}$ $s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$
a) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.
b) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución: a) $\pi: 3x - 5y - 4z - 19 = 0$ b) $\frac{11\sqrt{2}}{5}\ u$

12. Se considera la recta $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto P(1, 1, 1). Dado el punto Q(0,0,0) de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, p y Q tenga área 1.

Solución: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ y\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

13. Dados el punto A(1, - 2, - 3), la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $\pi: x - 2y - 3z + 1 = 0$ se pide:
a) La ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.
b) La ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Solución: a) $3x + 3y - z = 0$ b) $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$

14. Hallar los puntos de la recta $r: x - 3 = y - 5 = z + 1$ cuya distancia al plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución: $(4, 6, 0)\ y\ (2, 4, -2)$