GEOMETRÍA 3D I

1. Dados los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a), \vec{v} = (a, 1, a) \;\; y \;\; \vec{w} = (1, a, 1)$se pide:
   a) Determinar los valores de a para que los tres vectores sean linealmente dependientes.
   b) Estudiar si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los tres vectores para el caso $a = 2$.
   c) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple que $\vec{u} \cdot (\vec{v}\wedge\vec{w}) = 0$
   Nota: ^ significa producto vectorial.

Solución: a) $a = 0, a = \pm 1$. b) Es comb. Lineal.

2. Sean los puntos P(8,13,8) y Q(-4,-11,-8). Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.
   a) Obtener la ecuación del plano π.
   b) Calcular la proyección ortogonal del punto O(0,0,0) sobre π.
   c) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes de coordenadas y el origen de coordenadas.

Solución: a) $\pi: 3x + 6y + 4z - 12 = 0$. b) $O' = \left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$ c) $4u^3$

3. Se consideran los puntos A(1, a, 0), B(1, 1, a-2) y C(1, -1, a).
   a) Determinar los valores de a para los que están alineados.
   b) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos en función del parámetro a.

Solución: a) nunca lo están b) $1u^2$.

4. Dado el plano $\pi: x + y + z = 1$, la recta $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ y el punto P(1,1,0), se pide:
   a) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r que pase por P.
   b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
   c) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución: a) (x, y, z)=(1, 1, 0)+t(0, 1/2, -1/2) b) (1, 0, 1) c) (1/3, 1/3, -2/3).

5. Dados los planos $\pi 1: x + y + az = -2; \quad \pi 2 = x + ay + z = -1; \quad \pi 3 = ax + y + z = 3$
   a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos se cortan en una recta común.
   b) Para ese valor de a, hallar la recta común.

Solución: a) a = - 2 b) (x,y,z)=(-5/3, -1/3, 0) + t(1, 1, 1).

6. Dados el plano $\pi: x + 3y - z = 1$ y la recta $s: \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$
   a) Hallar la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.
   b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la intersección de ambos planos.

Solución: a) $5x - 7y - 16z + 17 = 0$ b) (x,y,z)=(- 2, 1, 0) + t(5/2, -1/2, 1).

7. Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0) y el plano $\pi: x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular a π y pasa por A y B.

Solución: $2x + y - 2 = 0$

8. Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x-y=2 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 2x-z+2=0 \\ 2y-mz=6 \end{cases}$
   a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
   b) Para dicho valor de m, determinar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución: a) $m=1$ b) $\pi: 11x+y-6z+8=0$

9. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(3, -1, 0) y corta perpendicularmente a la recta $r: \begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \\ z=5+3t \end{cases}$

Solución $s: \begin{cases} x=3+\frac{22}{7}t \\ y=-1-\frac{25}{7}t \\ z=-\frac{5}{7}t \end{cases}$

10. Sea el plano $\pi: x+2y+3z=6$
   a) Hallar el punto simétrico del origen respecto al plano.
   b) Hallar el plano perpendicular al plano que contiene a OZ.
   c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección del plano con los ejes de coordenadas.

Solución: a) (6/7, 12/7, 9/7) b) $\pi: 2x-y=0$ c) $6u^3$

11. Dados los puntos A(- 1, 1, 1), B(1, - 3, - 1) y C(1, 0, 3), hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta $r: x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$ de manera que el tetraedro ABCD tenga volumen $2u^3$.

Solución: a) (9, -7, 9) y (3, -1, 3)

12. Discutir según los valores del parámetro m la posición relativa de los planos

$\pi 1: x+z=m \qquad \pi 2: 4x+(m-2)y+(m+2)z=m+2 \qquad \pi 3: 2(m+1)x-(m+6)z=-m$

Solución: $m \neq 2$ y $m \neq -\frac{8}{3}$ se cortan en un punto. $m=2$ $\pi 1$ y $\pi 2$ paralelos y $\pi 3$ corta. $m=-\frac{8}{3}$ $\pi 1$ y $\pi 3$ paralelos

13. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$
   a) Hallar la recta t, perpendicular a r y s, que pasa por el origen.
   b) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t.

Solución: a) $t: (0,0,0)+k(3,-1,-1)$ b) (3, -1, -1)

14. Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}$ $s: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$
   a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y corta a r y s.
   b) Hallar la recta perpendicular común a r y s.

Solución: a) $t: \begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{cases}$ b) $t': \begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases}$

15. Sean los puntos A(0,1,0) y B(1,0,1):
   a) Escribir la ecuación de los puntos X(x,y,z) que equidistan de A y de B.
   b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos C(x,y,z) del plano x+y+z=3 tales que el triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en el vértice A.

Solución: a) $2x-2y+2z-1=0$ b) $r: \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$